PART2　常用対数

2　$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

［1］　18^{20} の桁数を求めよ。また，最高位の数字，および一の位の数字を求めよ。

［2］　(1)　$(1.25)^n$ の整数部分が 2 桁であるような整数 n の値の範囲を求めよ。

(2)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{1}{10000}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

Point Pickup

正の数 N の整数部分が n 桁　$\iff$　$10^{n-1} \leqq N < 10^n$　$\iff$　$n-1 \leqq \log_{10} N < n$

また，正の数 N の最高位の数字は $\log_{10} N$ の小数部分に注目する。

第13講　PART2　確認問題

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

1 12^{70} の桁数を求めよ。また，最高位の数字，および一の位の数字を求めよ。

桁数 [アイ]，　最高位 [ウ]，　一の位 [エ]

2 $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{20}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。また，その値を求めよ。

小数第 [オカ] 位，　その値は [キ]

3 $(1.5)^n$ の整数部分が 3 桁であるような整数 n の値の範囲を求めよ。

[クケ] $\leqq n \leqq$ [コサ]

4 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<\dfrac{1}{1000}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

$n=$ [シ]

PART2　常用対数

2　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

［1］　18^{20} の桁数を求めよ。また，最高位の数字，および一の位の数字を求めよ。

［2］ (1)　$(1.25)^n$ の整数部分が 2 桁であるような整数 n の値の範囲を求めよ。

(2)　$\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{10000}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

［1］　$\log_{10}18^{20}=20\log_{10}(2\cdot 3^2)=20(\log_{10}2+2\log_{10}3)=20(0.3010+2\times 0.4771)=25.104$

よって　$25<\log_{10}18^{20}<26$　より　$10^{25}<18^{20}<10^{26}$

したがって，18^{20} は 26 桁の数である。

$\log_{10}18^{20}=25.104$ より　$18^{20}=10^{25.104}=10^{0.104}\times 10^{25}$

$10^0=1$，$10^{0.3010}=2$　より　$1<10^{0.104}<2$

よって，$1\times 10^{25}<18^{20}<2\times 10^{25}$ より，18^{20} の最高位の数字は 1

18^n の一の位は，$n=1$，2，3，4，5，……　のとき 8，4，2，6，8，……　であり，
4 つの数 8，4，2，6 を順に繰り返す。

$18^{20}=18^{4\times 5}$ であるから，18^{20} の一の位の数字は 6

［2］ (1)　$(1.25)^n$ の整数部分が 2 桁のとき

$10^1\leqq(1.25)^n<10^2$　すなわち　$1\leqq\log_{10}(1.25)^n<2$

$$\log_{10}(1.25)^n=n\log_{10}1.25=n\log_{10}\frac{125}{100}=n\log_{10}\frac{10}{8}$$

$$=n(\log_{10}10-\log_{10}2^3)=n(1-3\log_{10}2)=n(1-3\times 0.3010)=0.097n$$

よって　$1\leqq 0.097n<2$ より　$\frac{1}{0.097}\leqq n<\frac{2}{0.097}$　　$10.3\cdots\cdots\leqq n<20.6\cdots\cdots$

したがって，求める整数 n の値の範囲は $11\leqq n\leqq 20$

(2)　$\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{10000}$　より　$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\log_{10}\frac{1}{10000}$　　$-n\log_{10}2<-4$

よって　$n>\frac{4}{\log_{10}2}=13.2\cdots\cdots$ より，求める自然数 n の最小値は $n=14$

第13講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：76，ウ：3，エ：4

[解説]

$$\log_{10} 12^{70} = 70\log_{10} 2^2\cdot 3$$
$$= 70(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$$
$$= 70(2\times 0.3010 + 0.4771)$$
$$= 70\times 1.0791$$
$$= 75.537$$

よって　$75 < \log_{10} 12^{70} < 76$

ゆえに　$10^{75} < 12^{70} < 10^{76}$ [A]

したがって，12^{70} の桁数は　**76**

$\log_{10} 12^{70} = 75.537$ より [B]

$$12^{70} = 10^{75.537} = 10^{0.537}\times 10^{75}$$

ここで　$10^{0.4771} = 3$

また，$10^{0.3010} = 2$ より

$$10^{0.3010\times 2} = 2^2$$
$$10^{0.6020} = 4$$

ゆえに

$$3 < 10^{0.537} < 4$$

よって　$3\times 10^{75} < 10^{0.537}\times 10^{75} < 4\times 10^{75}$

すなわち　$3\times 10^{75} < 12^{70} < 4\times 10^{75}$

したがって，12^{70} の最高位は　**3**

12^n の一の位は，$n = 1$，2，3，4，5，……のとき

2，4，8，6，2，……

であり，4 つの数 2，4，8，6 を順に繰り返す。

$12^{70} = 12^{4\times 17+2}$ より，12^{70} の一の位は　4

[A]　正の数 N の整数部分が n 桁
$\Longleftrightarrow 10^{n-1} \leqq N < 10^n$
$\Longleftrightarrow n-1 \leqq \log_{10} N < n$

[B]　正の数 N の最高位の数字は，$\log_{10} N$ の小数部分に注目する。

2 [正解] オカ：16，キ：2

[解説]

$$\log_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{20}=\log_{10}6^{-20}$$
$$=-20\log_{10}2\cdot3$$
$$=-20(\log_{10}2+\log_{10}3)$$
$$=-20(0.3010+0.4771)$$
$$=-20\times0.7781$$
$$=-15.562$$

よって　$-16<\log_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{20}<-15$ [C]

ゆえに　$10^{-16}<\left(\frac{1}{6}\right)^{20}<10^{-15}$

したがって，**小数第 16 位**に初めて 0 でない数字が現れる。

$\log_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{20}=-15.562$ より

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{20}=10^{-15.562}$$

両辺に 10^{16} を掛けると

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{20}\times10^{16}=10^{-15.562}\times10^{16}$$
$$=10^{0.438}$$

この値の整数部分が求める数である。[D]

$10^{0.3010}=2$，$10^{0.4771}=3$ より

$$2<10^{0.438}<3$$

よって　$2<\left(\frac{1}{6}\right)^{20}\times10^{16}<3$

したがって，$\left(\frac{1}{6}\right)^{20}$ を小数で表したとき，初めて現れる 0 でない数字は　**2**

> [C]　正の数 N の小数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れる
> $\Longleftrightarrow\left(\frac{1}{10}\right)^{n}\leqq N<\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$
> $\Longleftrightarrow10^{-n}\leqq N<10^{-n+1}$
> $\Longleftrightarrow-n\leqq\log_{10}N<-n+1$

> [D]　小数第 n 位に初めて現れる 0 でない数字を求めるときは，10^{n} を掛けた数の整数部分を求めればよい。

3 **[正解]** クケ：12，コサ：17

[解説]

$(1.5)^n$ の整数部分が 3 桁のとき

$$10^2 \leqq (1.5)^n < 10^3$$ [A]

すなわち

$$2 \leqq \log_{10}(1.5)^n < 3$$

ここで

$$\begin{aligned}\log_{10}(1.5)^n &= n\log_{10}1.5\\ &= n\log_{10}\frac{3}{2}\\ &= n(\log_{10}3-\log_{10}2)\\ &= n(0.4771-0.3010)\\ &= 0.1761n\end{aligned}$$

よって

$$2 \leqq 0.1761n < 3$$

$$\frac{2}{0.1761} \leqq n < \frac{3}{0.1761}$$

$$11.3\cdots \leqq n < 17.03\cdots$$

したがって，求める n の値の範囲は

$$\mathbf{12 \leqq n \leqq 17}$$

4 **[正解]** シ：7

[解説]

$\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{1000}$ より

$$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n < \log_{10}\frac{1}{1000}$$

$$-n\log_{10}3 < -3$$

よって

$$n > \frac{3}{\log_{10}3} = \frac{3}{0.4771} = 6.2\cdots$$

したがって，求める自然数 n の最小値は　**7**